

## 論文

## 희박기체 및 MEMS 열유동장 해석을 위한 벽면 슬립모델 개발

명노신\*, 조수용\*

## Development of Wall Slip Models for Rarefied Gas and MEMS Thermal Fluid Flows

Rho Shin Myong\* and Soo-Yong Cho\*

## ABSTRACT

Wall slip models are essential to the study of nonequilibrium gas transport in rarefied and microscale condition that can be found in gas flows associated with aerospace vehicle, propulsion system, and MEMS. The Maxwell slip model has been used for this type of problem, but it has difficulty in defining the so-called accommodation coefficient and has not been very effective in numerical implementation.

In the present study, on the basis of Langmuir's theory of the adsorption of gases on metals, a physical slip model is developed. The concept of the accommodation coefficient and the difference of gas particles are clearly explained in the new model. It turned out that the Langmuir model recovers the Maxwell model in the first-order approximation. The new models are also applied to various situations including internal flow in a microchannel. Issues of validation of models are treated by comparing analytic results with experiment.

## 초 록

희박 상태 비행체 외부 및 추진장치 내부 유동이나 MEMS 장치의 기체유동은 높은 열적 비평형성으로 인해 벽면 슬립모델을 필요로 한다. 조절계수와 벽면속도 구배를 바탕으로 하는 Maxwell 조건이 주로 사용되어 왔지만, 조절계수를 자체적으로 정의할 수 없고, 일차 미분 형태로 인해 실제 적용시 수치적 관점에서 효율적이지 못한 어려움이 있었다.

본 연구에서는 이 문제를 해결하고자 Langmuir의 벽면-기체입자 흡착이론을 이용한다. 벽면온도, 벽면-기체입자간 물리적 힘의 함수인 조절계수를 유도하고, 입자형태의 차이를 감안할 수 있는 물리적 슬립모델을 개발하여 기존 Maxwell 모델과 비교하였다. 또한 내부, 외부, 열유체 유동에 관한 슬립모델의 해석적 해를 실험값과 비교하여 그 유용성을 확인하였다.

**Key Words** : rarefied gas flows (희박기체 유동), MEMS fluid flows (미소기계장치 유동), wall slip models (벽면 슬립모델)

## 1. 서 론

† 2002년 4월 4일 접수 ~ 2002년 8월 28일 심사완료

\* 정희원, 경상대학교 기계항공공학부 및

항공기부품기술연구센터(ReCAPT)

연락처, E-mail : myong@nongae.gsnu.ac.kr

경남 진주시 가좌동 900번지

희박 영역에서 비행하는 항공우주 비행체나 최근 그 중요성이 부각되고 있는 MEMS에 관련된 기체유동[1,2,3]에서는 기체입자의 미시적 성질이 중요하게 되어 연속체 가정을 바탕으로 하는 기존 이론을 그대로 사용하는 데는 한계가 있다.

이런 이유로 Navier-Stokes (NS) 이론과 벽면 고착조건을 기체운동의 미시적 성질을 감안하도록 확장시키려는 노력이 있었다.

기체의 미시적 성질에 의한 비평형 효과는 기본적으로 점성과 관련이 있으며, 평형상태의 압력의 크기와 비교하면 기체역학의 기본 무차원수인 마하수와 Knudsen 수의 곱의 형태가 된다. 그러므로 기체밀도와 직접적 관련이 있는 Knudsen 수나 평균속도와 관련이 있는 마하수가 커지면 유동의 비평형도가 높아진다.

이러한 특징을 갖는 열적 비평형성을 간단하게 감안할 수 있는 방법으로 벽면 경계조건을 실험적 관찰과 일치하도록 고착에서 슬립으로 바꾸는 것을 생각할 수 있다. 이 방법은 회박유동에서 예상보다 작은 항력이 생기는 것을 설명하고자 Maxwell이 처음 제안한 이론을 바탕으로 하며 가장 많이 사용되고 있는 방법[4]이다. 이 기법은 벽면 슬립속도를 Knudsen 수와 벽면에서의 수직속도 구배의 곱으로 나타낸다. 하지만 이 기법은 벽면에서의 비평형성을 나타내는 조절계수를 자체적으로 정의할 수 없고, 최신 CFD 기법과 연계할 때 그 수학적 형태가 일차 미분 형태에서 수치적 관점에서 효율적이지 못한 어려움이 있었다.

본 논문에서는 이러한 문제를 해결하고자 Langmuir의 벽면-기체입자 흡착(adsorption)이론 [8]을 이용한다. 그 중심 내용으로서는 밀도, 벽면온도, 벽면-기체입자간 물리적 힘의 함수인 조절계수를 유도하고, 기체형태(단원자, 이원자, 혼합기체)의 차이를 감안할 수 있는 슬립조건을 개발하는 것이다. 마지막으로 그 정확성을 점검하기 위해 최신 실험자료가 존재하는 마이크로채널 내부유동, 구 주위 외부 유동, 온도효과를 고려하는 열유체 Graetz 문제를 해석적으로 계산한다.

## II. 벽면 슬립모델

고체벽면 근처에서의 기체의 슬립속도는 일차적으로 유동의 비평형성에 따라 달라진다. 유동의 비평형성은 마하수와 Knudsen 수의 곱에 비례하는데, 이 효과를 정확히 계산하기 위해서는 속도와 온도 구배의 함수인 점성력을 유도할 때 비선형성을 고려해야 한다. 이러한 유동의 비선형성에 의한 슬립효과 외에 고체벽면과 기체입자의 상호작용에 의한 효과를 생각할 수 있다. 이 효과는 기체입자가 벽면과 충돌하는 길이단위에서 일어나 기체입자의 평균속도와는 무관하게 되어 Knudsen 수만의 함수가 된다.

## 2.1 비선형 효과

비평형 상태에서의 유동의 비선형성을 알아보려면 Grad의 모우먼트 방정식이나 일반유체역학 방정식을 고려하면 된다. 단원자 기체에 관한 등온유동 요소관계식을 Grad 이론, 일반유체역학 (GH)[5] 순서대로 기술하면 다음과 같다.

$$\widehat{\Pi}_{xx} = -\frac{2 \widehat{\Pi}_{xy}^2 \text{NS}}{3 + 2 \widehat{\Pi}_{xy}^2 \text{NS}}, \quad (1)$$

$$\widehat{\Pi}_{xx} = -\frac{2 \widehat{\Pi}_{xy}^2 \text{NS}}{3 \sinh^2(\widehat{R}) / \widehat{R}^2 + 2 \widehat{\Pi}_{xy}^2 \text{NS}}. \quad (2)$$

여기서  $\widehat{R}^2 = 3 \widehat{\Pi}_{xx} (\widehat{\Pi}_{xx} - 1)$  이며, 압력  $p$ 에 대한 전단응력  $\Pi_{xy}$ 의 비  $\widehat{\Pi}_{xy}$ 은 아래 관계식을 사용하여 수직응력비  $\widehat{\Pi}_{xx}$ 로 부터 구할 수 있다.

$$\widehat{\Pi}_{xy} = \text{sign}(\widehat{\Pi}_{xy \text{NS}}) \left[ -\frac{3}{2} (1 + \widehat{\Pi}_{xx} \widehat{\Pi}_{xx}) \right]^{1/2}.$$

위 요소관계식을 Fig. 1에 선형이론과 비교하여 나타내었는데, 가장 중요한 특징은 높은 비평형도 영역에서 전단응력값이 아주 작아지는 점이다. 여기서 수직축은 전단응력비 또는 수직응력비를 나타낸다. 이러한 비선형 성질로 인해 벽면 근처에서 슬립이 발생하는데, Knudsen 수가 상대적으로 작지만 마하수가 높은 극초음속 유동에서 이 효과가 뚜렷해진다.

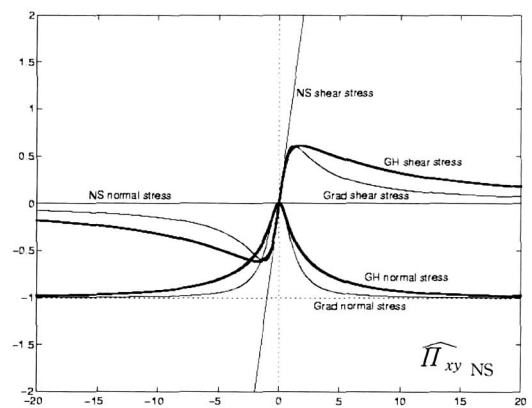


Fig. 1. Grad and GH constitutive relations to the NS theory in monatomic gas shear flow.

## 2.2 Maxwell 슬립모델

유동의 비선형 효과에 의한 벽면 근처에서의

슬립속도를 계산하는 방법으로 확산반사 개념에 기초한 Maxwell 슬립모델이 사용되어 왔다. 기체입자가 벽면에 흡수된 후 초기 접근상태와 무관하게 다시 방출되는 비율을  $f_v$ 로 정의하고, 입자가 벽면에서 평균자유행로  $\ell$ 만큼 떨어진 지점에서의 평균속도로 반사한다고 가정하면, 일차 슬립속도  $u_s$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$u_s = \sigma \ell \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_w. \quad (3)$$

여기서  $\sigma = (2 - f_v)/f_v$ 는 조절계수이다. 이 모델은 극초음속 유동이나 MEMS 유동장 해석에 광범위하게 사용되어 왔으나, 크게 두 가지 측면에서 개선의 여지가 존재해 왔다. 우선 비평형성과 관련된 조절계수  $\sigma$ 값을 자체 이론 내에서 정의할 수 없어 실험결과에서 유추하거나 임의로 사용해야 하는 어려움이 있다. 다음으로 수학적 형태가 일차미분 형태여서 Navier-Stokes 코드에 적용시킬 때 정확성이 떨어질 위험성이 있다. 또한 속도구배가 커지거나 확산반사 비율  $f_v$ 이 영에 접근할 때 슬립속도의 크기가 정의되지 않아 논리적 모순점이 존재한다. 한 예로 유동박리 부근에서 와류의 부호가 갑자기 변하는 Beskok의 계산[6]을 들 수 있다.

### 2.3 벽면-입자 상호작용: Langmuir 슬립모델

기체입자 크기 단위에서 일어나는 벽면-입자 상호작용은 흡착현상에 관한 표면화학 이론[7]을 적용하여 설명할 수 있다. 그 기본적인 개념은 기체입자가 표면에 부딪칠 때 곧바로 탄성적으로 반사하지 않고 표면원자의 van der Waals 힘에 의해 짧은 시간 동안 표면에 압축된 다음 발산하는 것이다. 이 현상은 Langmuir 이론[8]을 사용하여 간단하면서도 이론적으로 명료하게 설명할 수 있는데, 본 연구에서는 이 점에 착안하여 거시적 관점에서의 벽면 슬립속도를 유도한다. 슬립모델은 운동학 및 통계열역학 관점에서 유도할 수 있는데, 보다 간단한 운동학적 접근방식[8,9]을 적용하면 다음과 같다.

#### 운동학적 유도

고체표면에 기체입자와 상호 작용하는  $N$ 개의 사이트를 가정하면, 기체입자와 복합체를 이루는 비율  $\alpha$ 는 다음과 같이 유도될 수 있다. 고체표면과 열적 평형을 이루는 사이트의 수는  $N\alpha$ 이며, 그렇지 않는 수는  $N(1 - \alpha)$ 가 된다. 따라서

복합체 농도  $C_{SG}$ , 사이트 농도  $C_S$ , 기체입자 농도  $C_G$ , 반응평형상수  $K$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$C_{SG} = N\alpha, \quad C_S = N(1 - \alpha), \quad C_G = p/k_B T_w,$$

$$K \equiv C_{SG}/C_S C_G = \alpha/(1 - \alpha) \cdot k_B T_w/p.$$

여기서 첨자  $w$ 는 고체벽면을 표시하며,  $k_B$ 는 Boltzmann 상수를 나타낸다. 고체입자와 복합체를 이루는 비율  $\alpha$ 에 대해 정리하면 다음과 같이 표현된다. ( $\beta = K/k_B T$ )

$$\alpha = \frac{\beta p}{1 + \beta p}, \quad \text{또는} \quad \alpha = \beta p(1 - \alpha). \quad (4)$$

### Langmuir 슬립모델

고체 벽면과 열적 평형을 이루는 입자의 비율인  $\alpha$ 를 이용하면, 벽면에서의 슬립속도 및 온도를 다음 식으로 결정할 수 있다.

$$u_s = \alpha u_w + (1 - \alpha) u_r, \quad (5)$$

$$T_s = \alpha T_w + (1 - \alpha) T_r. \quad (6)$$

여기서 기준속도  $u_r$  및 기준온도  $T_r$ 는 벽면에서 평균자유행로 만큼 떨어진 지점에서의 값이나 자유류의 값으로 정할 수 있다. 화학반응 상수 역할을 하는  $\beta$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\beta = \frac{A l}{k_B T_w} \exp\left(\frac{D_e}{k_B T_w}\right). \quad (7)$$

$A$ 는 평균면적,  $D_e$ 는 퍼텐셜 변수,  $l$ 는 평균 충돌간격을 나타낸다.  $A, D_e$ 는 벽면의 재질과 기체입자의 종류에 의해 이론이나 실험으로 정해진다. 기준 평균자유행로를 평균충돌간격으로 가정하면 상수  $\beta$ 는 아래와 같이 간단해진다.

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi}{32}} \frac{\pi}{c^2} \frac{l}{\ell_r p_r} \frac{T_r}{T_w} \exp\left(\frac{D_e}{k_B T_w}\right). \quad (8)$$

여기서  $A$ 는  $\pi d_{STP}^2$ 로 근사하였으며, Ar-Al인 경우 다음과 같은 상수값을 사용하였다.

$$D_e = 1.32 \text{ kcal/mol}, \quad c = 1.018.$$

Langmuir 슬립모델은 이원자 기체에도 쉽게 적용될 수 있다.[10] 비어 있는 사이트가 두 개 일 기회는  $(1 - \alpha)^2$ 이고, 이원자 기체가 표면과

열적 평형을 이룰 기회는  $\alpha^2$ 가 되어 평형도  $\alpha$ 는 다음과 같이 된다.

$$\alpha = \frac{\sqrt{\beta p}}{1 + \sqrt{\beta p}}, \text{ 또는 } \alpha^2 = \beta p(1 - \alpha^2). \quad (9)$$

또한 Langmuir 슬립모델은 혼합기체인 경우로 확장될 수 있으며, 지금까지의 개념을 바탕으로 부분체적비  $V_{N_2}$ 인 질소와  $V_{O_2}$ 인 산소의 혼합기체에 대해 아래의 슬립 관계식을 유도할 수 있다. ( $V_{N_2} + V_{O_2} = 1$ )

$$\alpha = V_{N_2} \frac{\sqrt{\beta_{N_2} p}}{1 + \sqrt{\beta_{N_2} p}} + V_{O_2} \frac{\sqrt{\beta_{O_2} p}}{1 + \sqrt{\beta_{O_2} p}}. \quad (10)$$

### III. 적용 및 고찰

Langmuir 슬립모델 (4)-(10)의 정확성과 효용성을 알아보기 위해 크게 세 가지 부류의 문제를 고려한다. 다양한 공학문제에 적용가능한 지를 확인할 목적으로, 경계면이 잘 정의되는 내부유동, 원방 경계조건을 필요로 하는 외부유동, 온도의 효과가 중요한 열유체 유동을 선택하였다. 나아가 최대한 결과의 신뢰도를 높이기 위해, 수치오차를 피할 수 있는 이론적 해석이 가능한 경우와 최신 실험결과가 존재하는 문제로 국한하였다. 이 두 조건은 관련 속도 영역을 저속인 경우로 한정하는 것을 의미하는데, 고속유동인 경우에는 마하수에 비례하는 유동의 비선형성이 커져 해석적 방법을 적용할 수 없는 Navier-Stokes 방정식보다 한단계 높은 비선형 수학방정식을 사용해야 하고 벽면-입자 상호작용에 의한 슬립효과를 분리하여 분석할 수 없기 때문이다.

#### 3.1 마이크로 채널 및 튜브

마이크로 채널이나 튜브는 MEMS 장치의 기본 요소로서 이전연구에서 많이 다루어져 왔고, Ho[11]등에 의한 최신 실험결과가 존재하여 벤치마크 문제이다. 높이( $y; H$ )가 마이크로 단위로 길( $x; L$ )이 밀리미터 단위인 입·출구 압력 차이에 의해 유발되는 채널 내부의 저속 등온 유동은 아래의 편미분 방정식에 의해 해석될 수 있다.

$$\epsilon \frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{24}{\delta} \frac{dp}{dx} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (12)$$

여기서,  $\delta = 24N_\delta/\epsilon$ ,  $N_\delta = KnM\sqrt{2\gamma/\pi}$ ,  $\epsilon$ 은 채널 길이 대 높이 비를 나타낸다. 속도  $u$ 는 채널 출구의 평균속도에 관한 상대적 값으로 정의되며, 나머지 변수들도 적절한 기준값을 사용하여 무차원화되었다. (11)식은 압축성 연속방정식인데, 비록 속도가 잘 알려진 비압축성 유동 판단기준  $M=0.3$  이하이지만 MEMS 채널 유동에서는 점성에 의한 압력변화를 무시할 수 없기 때문에 사용되었다[4]. (12)식은 운동량 방정식을  $\epsilon$ 에 대해 교란기법으로 구한 방정식이다.

#### Langmuir 국소 및 Maxwell 조건(단원자)

기준속도를 채널내부의 최대값으로 정의하는 Langmuir 국소 경계조건은 고정 벽면에 대해 다음과 같이 표현된다.

$$u_s = \frac{u(x, y=0)}{1 + \beta p}.$$

여기서  $x=0, 1$ 는 채널 입구와 출구,  $y=0$ 는 채널 중간 지점을 나타낸다. 식 (11), (12)에 입·출구 압력 조건, 벽면슬립 경계조건, 대칭조건, 벽면 수직속도가 영인 조건을 적용하면, 다음식을 구할 수 있다.

$$u = -\frac{3}{\delta} p' [1 - 4y^2 + \frac{1}{\beta p}], \quad (13)$$

$$1 - x = \frac{1 - p^2 + 2[1 - p]/\beta}{1 - p_{in}^2 + 2[1 - p_{in}]/\beta}, \quad (14)$$

$$\delta = p_{in}^2 - 1 + 3(p_{in} - 1)/\beta, \quad m = \frac{H^3 W p_{out}^2}{24\eta L R T} \delta.$$

여기서  $W, \eta, R$ 는 채널 폭, 점성계수, 기체상수를 나타내며, 연속유동 해는  $\beta$ 를 무한대로 증가시켜 구할 수 있다. 위 결과는 기존의 Maxwell 조건  $u_s = \sigma Kn/p [\partial u / \partial y]$ , 그 조절계수  $\sigma$  및 Langmuir의  $\beta$ 값에 관한 아래의 식을 사용하여 동일하게 구할 수 있다.

$$4\sigma Kn = \frac{1}{\beta}. \quad (15)$$

이 관계식은 아주 중요한 의미를 내포하는데, Langmuir 경계조건이 일차 Maxwell 조건을 부분집합으로 포함하는 것을 뜻한다. 다시 말해 Langmuir 개념을 이용하여 일차 슬립조건을 넘어서는 보다 확장된 조건을 개발했음을 의미한다. Maxwell 조건만으로는 조절계수 이상의 물리적 의미를 전혀 발견할 수 없는 상수  $\sigma$ 값은

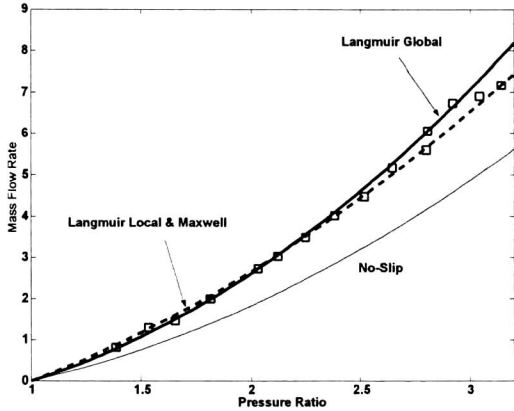


Fig. 2. Mass flow rate (kg/s) of Helium gas flows in the scale of  $10^{-12}$ ,  $Kn=0.158$ . (Symbol : experimental data[11].)

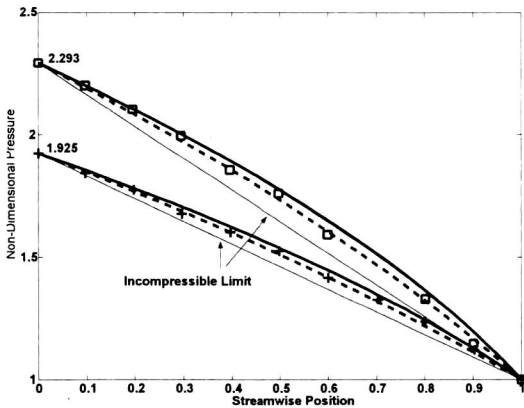


Fig. 3. Pressure distribution of Helium gas along the channel.

식 (8)과 (15)를 적용하면 아래와 같은 새로운 의미를 갖는 값이 된다.

$$\sigma^{-1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{c^2} \frac{T_r}{T_w} \exp\left(\frac{D_e}{k_B T_w}\right). \quad (16)$$

벽면온도가 높거나 기준 유동온도가 낮을수록, 기체의 퍼텐셜 변수가 낮을수록 슬립속도가 커짐을 알 수 있다. 이와 같은 간단한 발견만으로도 조절계수 값을 정할 때 큰 도움이 된다.

Fig. 2와 3에 헬륨가스의 유량과 채널내부 압력분포를 나타냈는데, 예측 값이 실험과 잘 일치함을 확인할 수 있다. ( $H=1.2\mu m$ ,  $W=40\mu m$ ,  $L=4mm$ ,  $p_{out}=1atm$ ,  $T=293K$ ,  $\sigma=1.16$ ,  $\beta=0.176/Kn$ ,  $N_\delta=O(10^{-5})$ .) Ho[11]등의

실험에서 사용된 고체벽면의 특성이 명확하지 않아  $\sigma$  (또는  $D_e$ ) 값을 실험을 가장 잘 묘사하는 값으로 정하였다.

### Langmuir 고차조건 (단원자)

채널의 위치에 따라 그 기준값이 변하는 Langmuir 국소 경계조건이 Maxwell의 일차조건과 일치한다는 사실로부터, 기준속도를 국소값이 아닌 전체 유동장 최대값으로 하면 일차 이상의 조건이 될 것으로 예상할 수 있다. 즉 아래의 조건에 대한

$$u_s = \frac{u(x=1, y=0)}{1 + \beta p},$$

주요 결과는 아래와 같다.

$$u = -\frac{3}{\delta} \left[ p' (1 - 4y^2) + \frac{1 + \beta}{\beta(1 + \beta p)} p' \right]_{x=1} \quad (17)$$

$$1 - x = \frac{g(p) - g(1)}{g(p_{in}) - g(1)}. \quad (18)$$

여기서  $\delta = \frac{2\beta(2\beta+3)}{2\beta^2-3} [g(p_{in}) - g(1)]$ ,

$$g(p) \equiv \frac{ap}{\beta^2} + \frac{p^2}{2} - \left( \frac{a}{\beta^3} - \frac{a^2}{\beta^4} \right) \ln(\beta^2 p + \beta - a),$$

$$a = \frac{3\beta(\beta+1)}{3-2\beta^2}.$$

이 경우 해의 특징은 높은 Knudsen 수에서의 유량값 변화와 직접적 관련이 있는 함수  $g(p)$ 의 로그 항이다. Fig. 4에서 보듯이 이 로그 항으로 인해 위 결과 식은 Knudsen의 유량최소 경향을 예측할 수 있으며, 압력 차이가 그렇게 높지 않는 다음 범위에서만 의미를 갖게 된다.

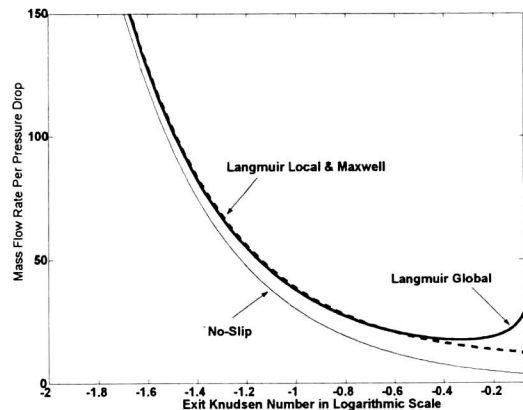


Fig. 4. Variation of mass flow rate of Helium gas per pressure drop ( $p_{in}=2$ ). (Divided by a factor  $\sqrt{\pi/2} H^2 W / (2AL\sqrt{RT})$ )

$$\beta^2 p_{in} + \beta - a > 0. \quad (19)$$

이것은 고차조건의 특징, 즉 그 이론 자체적으로 그 적용범위를 보여주는 것과 일치하며, 그 물리적 의미는 (19) 식이 위배되는 높은 비평형 유동 문제에는 본 해석에 적용된 모델 방정식보다 확장된 방정식을 사용해야 함을 뜻한다.

### Langmuir 국소조건 (이원자)

이원자 입자에 대한 Langmuir 국소 경계조건은 다음과 같다.

$$u_s = \frac{u(x, y=0)}{1 + \sqrt{\beta p}}.$$

그 주요 결과는 아래와 같다.

$$u = -\frac{3}{\delta} p' [1 - 4y^2 + \frac{1}{\sqrt{\beta p}}], \quad (20)$$

$$1 - x = \frac{1 - p^2 + 3[h(1) - h(p)]/\beta^2}{1 - p_{in}^2 + 3[h(1) - h(p_{in})]/\beta^2}. \quad (21)$$

여기서  $\delta = -p'_{x=1} \left( 2 + \frac{3}{\sqrt{\beta}} \right)$ ,  $h(p) \equiv \frac{\beta p}{3} \sqrt{\beta p} - \frac{3}{8} \beta p + \frac{9}{16} \sqrt{\beta p} - \frac{27}{64} \ln \left[ \frac{3}{4} + \sqrt{\beta p} \right]$ .

축대칭 튜브 유동은 이차원 마이크로 채널 유동과 유사하므로, 채널 관계식에 유량, 속도에 대해 각각  $3\pi/32$ ,  $1/2$  인자를 곱하면 튜브 관계식이 된다. 이런 이유로 Figs. 2-5에 채널유동에 관한 결과만을 나타내었다. Fig. 5는 이원자 기체인 질소의 유량을 나타내며, 슬립에 의한 유량증가가 현저함을 잘 보여준다.

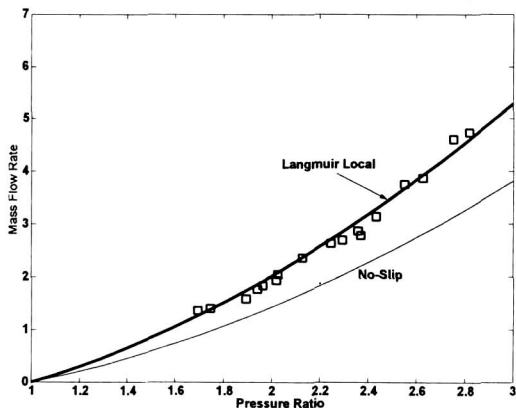


Fig. 5. Mass flow rate of Nitrogen gas flows in the scale of  $10^{-11}$ ,  $Kn=0.054$ . (Symbol: experimental data[11].)

### 3.2 구주위 느린 유동

점성항이 관성항에 비해 아주 큰 유동을 저 Reynolds수 유동, 느린 유동 또는 Stokes 유동이라 일컫는데, 비평형도에 비례하는 점성항이 지배적이므로 밀도가 낮은 유동에서는 슬립효과가 중요하게 된다. 관성항을 무시할 때 수학적 어려움이 없는 삼차원 구주위 유동과 해석의 편이를 위해 등온문제를 고려한다. MEMS 채널 내부유동과 달리 저속유동인 경우 비압축성으로 가정할 수 있어, 지배 방정식은 잘알려진 Stokes 방정식이 된다. (반경  $R$ 인 구, 자유류 속도  $U$ )

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (22)$$

$$\nabla p = \eta \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (23)$$

슬립유동인 경우 경계조건은 아래와 같다.

$$r=R; u_r=0, u_\phi = u_{\phi_s},$$

$$r \rightarrow \infty; u_r = U \cos \phi, u_\phi = -U \sin \phi, p = p_\infty.$$

### Maxwell 조건

벽면에 평행한 속도의 수직방향 구배에 비례하는 Maxwell 경계조건은 아래와 같다.

$$u_{\phi_s} = \sigma \ell \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right]_{r=R}.$$

Stokes 해와 동일한 과정[12]을 거쳐 구하면 그 주요 결과는 다음과 같다.

$$u_r = U \cos \phi \left\{ 1 + k_1 \left( \frac{R}{r} \right) + k_2 \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right\} \quad (24)$$

$$u_\phi = -U \sin \phi \left\{ 1 + \frac{k_1}{2} \left( \frac{R}{r} \right) - \frac{k_2}{2} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right\} \quad (25)$$

$$p = p_\infty + \frac{k_1 \eta R U \cos \phi}{r^2}. \quad (26)$$

$$k_1 = -\frac{3(1+4\sigma Kn)}{2(1+6\sigma Kn)}, \quad k_2 = \frac{1}{2(1+6\sigma Kn)}.$$

점성저항과 압력저항의 합에 관계되는 항력계수는 다음과 같다. (구의 직경이 기준길이)

$$C_D = \frac{24}{Re} \left( \frac{1+4\sigma Kn}{1+6\sigma Kn} \right).$$

### Langmuir 조건

벽면-입자(단원자) 상호작용에 관한 등온유동 Langmuir 경계조건은 아래와 같다. ( $e$ )1)

$$u_{\phi_s} = \frac{u_\phi(r=eR)}{1 + \beta}.$$

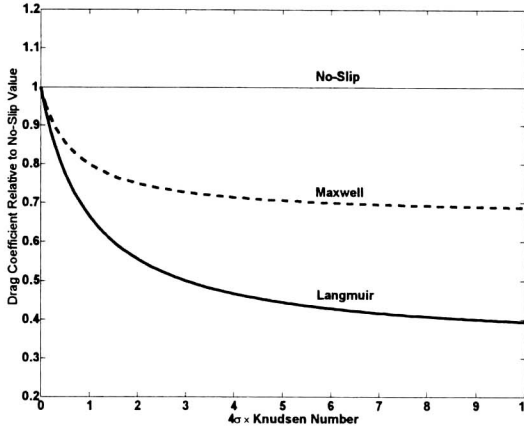


Fig. 6. Variation of drag coefficient with the Knudsen number.

여기서  $\beta$ 는 (8) 또는 (15)에 주어진 식을 나타낸다. Maxwell 해와 동일하게 해석하면, Knudsen 수의 함수인 상수  $k_1, k_2$ 가 아래와 같이 됨을 쉽게 증명할 수 있다.

$$k_1 = \frac{e^{-3} - 1 - 3\beta}{2(\beta + 1 - d)}, \quad k_2 = \frac{e^{-1} - 1 + \beta}{2(\beta + 1 - d)}.$$

여기서  $d = (e^{-1} + e^{-3})/2$ . 항력계수는 다음과 같다.

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} \left\{ \frac{\beta + (1 - e^{-3})/3}{\beta + 1 - d} \right\}.$$

이 식들은  $e > 1$ 이면 모든 Knudsen 수에 대해 잘 정의되며, Maxwell 해와 유사한 경향을 보여준다. 유입속도를 기준속도로 정한 경우, 연속 극한  $24/\text{Re}$ 과 무한 Knudsen 수 극한  $8/\text{Re}$ 사이를 연결하는 성질을 나타낸다. (Fig. 6)

### 3.3 열유체 유동: 확장 Graetz 문제

원형 튜브 내부 층류유동의 대류 열전달을 나타내는 Graetz 문제[13]를 슬립유동 상태로 확장하면, 슬립온도 효과를 살펴볼 수 있다. Graetz 문제는 튜브내의 온도  $T_0$ 인 완전 층류 저속 비압축성 유동이 갑자기 벽면온도  $T_w$ 인 영역에 들어간 후의 온도변화를 나타내는데, 운동량 및 에너지 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = \text{상수}, \quad (27)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\rho c_p / k} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (28)$$

### Maxwell 조건

Maxwell 슬립속도  $u_s = -\sigma \ell [du/dr]$ 에 대한 운동량 방정식 해는 다음과 같다.

$$u \left( \frac{r}{R} \right) = \frac{u(r)}{u_{\max}} = \frac{1 - (r/R)^2 + 4\sigma \text{Kn}}{1 + 4\sigma \text{Kn}}. \quad (29)$$

Maxwell 온도조건  $T_s = T_w - \sigma_T \ell [\partial T / \partial r]$ 과  $\rho_s^2 = 1/(1 + 4\sigma \text{Kn})$ ,  $\theta = (T - T_w)/(T_0 - T_w)$ ,  $\hat{r} = r\rho_s/R$ ,  $\hat{z} = z/R \cdot \rho_s^2(2 - \rho_s^2)/(\text{RePr})$ 를 이용하면, 에너지 방정식과 경계조건은 다음과 같이 간단해진다. (온도 조절계수  $\sigma_T$ )

$$(1 - \hat{r}^2) \frac{\partial \theta}{\partial \hat{z}} = \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left( \hat{r} \frac{\partial \theta}{\partial \hat{r}} \right), \quad (30)$$

$$\theta(\hat{r}, 0) = 1, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \hat{r}} \right|_{\hat{r}=0} = 0, \quad (31)$$

$$\theta(\rho_s, \hat{z}) + \frac{\sigma_T}{\sigma} \frac{1 - \rho_s^2}{2\rho_s} \frac{\partial \theta}{\partial \hat{r}} \Big|_{\hat{r}=\rho_s} = 0. \quad (32)$$

### Langmuir 조건

아래 Langmuir 조건에 대한 Graetz 문제 지배 방정식과 경계조건은 (32)식을 제외하고는 Maxwell 조건과 동일함을 쉽게 증명할 수 있다.

$$u_s = \frac{u(r=0)}{1 + \beta}, \quad T_s = \frac{\beta T_w + T_{r=0}}{1 + \beta}.$$

$$\theta(\rho_s, \hat{z}) = \frac{\theta(\hat{r}=0, \hat{z})}{1 + \beta}. \quad (33)$$

Langmuir 조건인 경우는 식 (30), (31), (33), Maxwell 조건에서는 (33) 대신 (32)를 적용시키면 되는데, Langmuir 조건이 보다 수학적으로 단순한 형태이다. 이 식들은 변수분리법을 사용하여 복잡하지만 Whittaker 함수와 같은 초기함수 형태로 그 해석적 해를 구할 수 있다. Langmuir 조건을 온도슬립 문제에 적용할 수 있는지를 확인하는 것이 본 연구의 일차적인 목적이어서 해의 자세한 내용은 다음 연구에서 다룰 예정이다.

### 3.4 슬립모델 비교

내부, 외부, 열유체 유동장에 관한 해석을 바탕으로 슬립모델의 특징을 비교하면 다음과 같이 요약할 수 있다. Maxwell 모델은 경계면 반공간의 수학적 근사 해인 반면, Langmuir 모델은 현상에 관한 통계 열역학적 이론이다. 물리적

측면의 장점 때문에 Langmuir 모델은 조절계수와 입자종류의 차이를 자체 이론 내에서 정의할 수 있고, 슬립이 기준 값보다 항상 작은 유한성을 충족시킨다. 또한 수학적으로 Dirichlet 형태인 Langmuir 모델이 Neumann 형태인 Maxwell 조건보다 단순할 뿐 아니라, 식 (15)에서 알 수 있듯이 일차 Maxwell 조건이 Langmuir 조건의 부분해가 되어 새 모델이 보다 넓은 의미의 모델이라 할 수 있다.

#### IV. 결론 및 토의

학문적, 기술적 관심이 높아지고 있는 비평형 유동을 새로운 각도에서 다루어 희박기체 및 MEMS 열유체 유동에 관한 기존이론의 문제점을 보완할 수 있는 새 접근방식을 제시하였다. 유동장에서의 점성항의 상대적 크기에 관한 간단한 고려에서 출발하여 비평형 현상을 유동내부 비선형 효과와 기체-벽면 상호작용 효과로 분리하여 해석하는 방식의 타당성을 보여 주었다. 이 과정에 흡착현상에 관한 Langmuir의 물리적 모델을 개발하여 기존의 Maxwell 수학적 모델의 문제점을 보완하였다. 마지막으로 내부, 외부, 열유체 유동에 관한 슬립모델의 해석적 해를 실험 값과 비교하여 그 유용성을 확인하였다.

#### 후 기

본 연구는 한국과학재단 특정기초연구(과제 번호 1999-2-305-001-3) 사업의 지원을 받아 수행되었으며 이에 감사드립니다.

#### 참고문헌

1. Ho, C. M. and Tai, Y. C., "Micro-Electro-Mechanical-Systems (MEMS) and Fluid Flows,"

*Annual Review in Fluid Mechanics*, Vol. 30, pp.11-22, 1999.

2. Helvajian, H., *Microengineering Aerospace Systems*, The Aerospace Press, 1999.

3. 김형순, 권오준, 김민규, "비정렬격자에서 병렬화된 격자중심 직접모사 기법 개발," 한국항공우주학회지, Vol. 30, No. 2, pp. 1-11, 2002.

4. Gad-el-Hak, M., "The Fluid Mechanics of Microdevices—The Freeman Scholar Lecture," *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 121, pp. 5-33, 1999.

5. Eu, B. C., *Kinetic Theory and Irreversible Thermodynamics*, John Wiley & Sons, New York, 1992.

6. Beskok, A. and Karniadakis, G. E., "Modeling Separation in Rarefied Gas Flows," *AIAA Paper* 1997-1883.

7. Adamson, A. W., *Physical Chemistry of Surfaces*, John Wiley & Sons, New York, 1982.

8. Langmuir, I., "Surface Chemistry," *Chemical Reviews*, Vol. 13, p. 147, 1933.

9. Eu, B. C, Khayat, R. E., Billing, G. D., and Nyeland, C., "Nonlinear Transport Coefficients and Plane Couette Flow of a Viscous, Heat-Conducting Gas between Two Plates at Different Temperatures," *Can. J. Phys.*, Vol. 65, pp. 1090-1103, 1987.

10. Myong, R. S., "Velocity-Slip Effect in Low-Speed Microscale Gas Flows," *AIAA Paper* 2001-3076.

11. Shih, J. C., Ho, C. M., Liu, J., and Tai, Y. C., "Monatomic and Polyatomic Gas Flow through Uniform Microchannels," *ASME MEMS*, DSC-Vol. 59, pp. 197-203, 1996.

12. 노오현, *점성유체역학기초*, 박영사, 1992.

13. White, F. M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw Hill, 1974.