

論文

이원자 기체 일반유체역학 모델을 이용한 극초음속 희박 유동장 해석

명노신*

Numerical Analysis of Rarefied Hypersonic Flows Using Generalized Hydrodynamic Models for Diatomic Gases

Rho Shin Myong*

ABSTRACT

The study of nonlinear gas transport in rarefied condition or associated with the microscale length of the geometry has emerged as an interesting topic in recent years. Along with the DSMC method, several fluid dynamic models that come under the general category of the moment method or the Chapman-Enskog method have been used for this type of problem. In the present study, on the basis of Eu's generalized hydrodynamics, computational models for diatomic gases are developed. The rotational nonequilibrium effect is included by introducing excess normal stress associated with the bulk viscosity of the gas. The new models are applied to study the one-dimensional shock structure and the multi-dimensional rarefied hypersonic flow about a blunt body. The results indicate that the bulk viscosity plays a considerable role in fundamental flow problems such as the shock structure and shear flow. An excellent agreement with experiment is observed for the inverse shock density thickness.

초 록

희박상태나 극소장치에 관련된 기체운동을 해석하는 문제가 최근 중요한 연구주제로 부각되고 있다. 잘 알려진 DSMC와 더불어 모우멘트 기법, Chapman-Enskog 기법으로 분류되는 고차 비평형 유동 해석모델들이 이 문제에 적용되어 왔다.

본 연구에서는 Eu의 일반유체역학을 근간으로 이원자 기체에 관한 고차 해석모델을 개발하고자 한다. 회전 비평형 효과는 기체의 용적 점성계수에 관한 초과 수직응력을 고려하여 감안하였다. 개발된 계산모델을 일차원 충격파 내부구조와 단순 형상 외부의 희박 극초음속 유동장 해석에 적용하였다. 충격파 내부구조 및 전단유동 해석을 통해 회전 비평형에 의한 용적 점성계수 효과가 중요함을 확인하였다. 충격파 내부구조에 관한 이론적 예측이 실험과 잘 일치함도 확인하였다.

Key Words : rarefied hypersonic flows(희박 극초음속 유동), diatomic gas(이원자 기체)

1. 서 론

† 2002년 1월 5일 접수 ~ 2002년 6월 18일 심사완료

* 정희원, 경상대학교 기계항공공학부 및

항공기부품기술연구센터(ReCAPT)

연락처, E-mail : myong@nongae.gsnu.ac.kr

경남 진주시 가좌동 900번지

희박 영역이나 극소 장치에 관련된 기체유동은 기체입자의 미시적 성질이 중요하게 되어 연속체 가정을 바탕으로 하는 기존의 이론을 그대로 사용하는 데는 한계가 있다. 이같은 문제는 50년

대 이후 활발히 연구되고 있는 항공우주 분야의 극초음속 유동[13] 뿐만 아니라 진공에 가까운 영역에서 작동하는 각종 장치, 마이크론 단위의 초소형 기계장치에 관련된 유동[1]에서도 발견된다. 이러한 유동장에 관한 연구는 크게 실험과 이론분야 연구로 나뉘어 질 수 있는데 모두 많은 어려움을 겪어 왔다. 실험과 관련해서는 극초음속 희박유동을 지상에서 모사하는 문제, 극소유동장을 측정할 수 있는 실험장치 개발에 어려움이 있어왔다. 이론 연구에서는 모우멘트 법 또는 Chapman-Enskog 법을 기초로 Navier-Stokes-Fourier (NSF) 방정식을 확장하려는 여러 시도가 있었지만, 충격파나 급속 팽창 유동에서 열역학 2법칙을 만족시키지 못해 어려움을 겪어 왔다 [13]. 반면 수학 방정식을 사용하지 않는 DSMC 기법[2,3]이 극초음속 희박기체 유동장 해석에 성공적으로 적용되어 왔다.

이같은 어려움을 해결하고자 최근 열역학 2법칙을 엄밀히 만족시키는 Eu의 일반유체역학[5]을 기초로 전산유체역학 계산모델을 개발하려는 시도가 있어 왔다. 초기 연구에서는 단원자 기체에 관한 계산모델[7,9]과 적절한 미끄럼 경계조건 [10] 개발에 주안점을 두었다. 개발된 계산모델은 충격과 내부구조, 이차원 평판 주위의 충격파 및 경계층 상호작용[9], 축대칭 노즐 내부의 희박 유동[8], 마이크론 크기의 채널 내부 유동장 계산 [10]에 성공적으로 적용되었다.

본 연구에서는 이러한 이전 연구를 바탕으로 단원자 기체에 관한 모델을 이원자 기체 문제로 확장하고자 한다. 지배방정식과 함께 경계조건을 확장하고 요소방정식을 계산하여 용적(bulk) 점성계수에 관련된 회전 비평형 효과를 알아보는 것이 주된 목적이다.

II. 이원자 기체 일반 유체방정식

Eu에 의해 처음으로 제안된 일반유체역학[5]의 가장 중요한 물리적 특징은 비평형 정도에 상관없이 열역학 2법칙을 엄밀히 충족시키는 점이다. 이것은 비평형 시스템의 비가역 열역학에 관한 새로운 이해를 바탕으로 가능해졌으며, 다른 이론들과 구분되는 성질이다.

2.1 비평형 유체 지배방정식

열역학 충족 유체 해석모델을 Eu의 일반유체역학을 기초로 유도하면, 이원자 기체에 관한 무차원 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \rho E \end{pmatrix}_t + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \frac{p}{\gamma M^2} \mathbf{I} \\ (\rho E + \frac{p}{\gamma M^2}) \mathbf{u} \end{pmatrix} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \Pi + f_b \Delta \mathbf{I} \\ (\Pi + f_b \Delta \mathbf{I}) \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{\text{EcPr}} \mathbf{Q} \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

및 요소관계식

$$\Pi q(\mathcal{R}) = (1 + f_b \mathcal{Z}) \Pi_0 + [\Pi \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}] \quad (2)$$

$$\mathcal{Z} q(\mathcal{C}\mathcal{R}) = \mathcal{Z}_0 + \frac{3}{2} f_b (\Pi + f_b \mathcal{Z} \mathbf{I}) : \nabla \hat{\mathbf{u}} \quad (3)$$

$$\mathcal{Q} q(\mathcal{C}\mathcal{R}) = (1 + f_b \mathcal{Z}) \mathcal{Q}_0 + \Pi \cdot \mathcal{Q}_0. \quad (4)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Pi &\equiv \frac{N_\delta}{p} \Pi, \quad \mathcal{Z} \equiv \frac{N_\delta}{p} \Delta, \\ \mathcal{Q} &\equiv \frac{N_\delta}{p} \frac{\mathcal{Q}}{\sqrt{T/(2\varepsilon)}}, \quad \nabla \hat{\mathbf{u}} \equiv -2\eta \frac{N_\delta}{p} \nabla \mathbf{u}, \\ q(\mathcal{C}\mathcal{R}) &= \frac{\sinh(c\mathcal{R})}{c\mathcal{R}}, \\ \mathcal{R}^2 &= \Pi : \Pi + \frac{4}{5f_b} \mathcal{Z}^2 + \mathcal{Q} \cdot \mathcal{Q}, \\ \varepsilon &= \frac{1}{\text{PrEcT}_r/\Delta T}, \quad f_b = \frac{\eta_b}{\eta}. \end{aligned}$$

잘 알려진 NSF 관계식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= -2\eta[\nabla \mathbf{u}]^{(2)}, \quad \Delta_0 = -\eta_b \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ \mathcal{Q}_0 &= -\lambda \nabla \ln T. \end{aligned} \quad (5)$$

Stokes 가정에서 필요로 하는 2차 점성계수[4]는 $(\eta_b - 2\eta/3)$ 에 해당된다.

η, η_b, λ 는 Chapman-Enskog 점성, 용적 점성 및 열전도를 나타낸다. f_b 는 전단 점성계수에 관한 용적 점성계수의 비를 나타내며, 음파흡수 측정실험을 통해 결정할 수 있다. 질소인 경우 약 0.8 정도의 값을 갖는 것으로 알려져 왔다[6].

$\rho, \mathbf{u}, p, E, \Pi, \Delta, \mathbf{Q}$ 은 밀도, 속도, 압력, 총에너지 밀도, 스트레스, 초과 수직응력, 열전달을 나타내며, 변수들은 아래 식으로 무차원화되었다.

$$\begin{aligned}
 t^* &= t/(L/u_r), \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{x}/L, \quad \eta^* = \eta/\eta_r, \\
 \lambda^* &= \lambda/\lambda_r, \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{u}/u_r, \quad \rho^* = \rho/\rho_r, \\
 T^* &= T/T_r, \quad p^* = p/p_r, \quad E^* = E/u_r^2, \\
 \Pi^* &= \Pi/(\eta_r u_r/L), \quad \Delta^* = \Delta(\eta_b u_r/L), \\
 \mathbf{Q}^* &= \mathbf{Q}/(\lambda_r \Delta T/LT_r).
 \end{aligned}$$

기호 (*)는 편의상 각종 방정식에서 생략되었다. $[\nabla \mathbf{u}]^{(2)}$ 는 속도구배 텐서의 주대각선 요소의 합이 영인 대칭부분을 나타내며 $[\Pi \cdot \nabla \mathbf{u}]^{(2)}$ 는 응력과 속도구배 텐서의 상호작용을 묘사한다. 콜론(colon)은 텐서 사이의 이중 내적을 뜻하고 첨자 r 는 기준상태를 나타낸다. c 는 1보다 약간 큰 값을 갖는 상수로 분자입자간 상호작용 퍼텐셜 ν 의 함수이며 기체의 종류에 따라 조금씩 달라진다[9,17]. 계수 ν 를 이용하면 아래와 같은 점성 및 열전도 관계식을 구할 수 있다 ($s = 1/2 + 2/[\nu - 1]$).

$$\eta = T^s, \quad \lambda = T^{s+1}.$$

열량적 완전기체이면 다음 식이 성립한다.

$$p = \rho T, \quad \rho E = \frac{p/\gamma M^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}. \quad (6)$$

($\hat{}$)을 정의할 때 사용되는 무차원수 N_δ 는 비가역 과정을 묘사하는 \hat{R} 과 관련되어 비평형도를 나타내며, Knudsen수에 비례한다.

$$N_\delta = \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} \text{Kn} \cdot M.$$

무차원수 N_δ 가 작으면 요소관계식 (2)-(4)는 (5)식과 일치하게 되어 준평형 방정식이 된다. 하지만 여기서는 이원자 기체를 다루므로 η_b 값이 영이 아니며 2차 점성계수가 Stokes 가정을 사용한 경우의 값 ($-2\eta/3$)과 다르다. 그러므로 식 (5)는 잘 알려진 Stokes 가정을 적용한 NSF 방정식과 구별되어야 한다.

이원자 기체인 경우 ($\gamma = 7/5$), Prandtl 수는 아래의 Eucken 관계식[17]을 통하여 정해진다.

$$\text{Pr} = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5}.$$

2.2 경계조건

고체표면 근처의 기체 유동을 다루는 경계조건

은 비평형 유동연구에서 중요한 위치를 차지한다. 이 문제는 흡착(adsorption) 현상[11]으로 불리어지는 물리화학 현상과 깊은 관련이 있다. 기체입자가 표면에 부딪힐 때 곧바로 탄성적으로 반사하지 않고 표면 원자간 힘에 의해 짧은 시간 동안 표면에 압축된 다음 발산하는 사실로부터 거시적 관점에서의 속도 미끄럼을 유도한다. 이러한 설명 방식 (Langmuir 경계조건)을 통해 단원자 기체에 관한 아래의 평형상태 표면 비율 α , 속도 및 온도 미끄럼을 계산할 수 있다[9-12].

$$u = \alpha u_w + (1 - \alpha) u_r, \quad (7)$$

$$T = \alpha T_w + (1 - \alpha) T_r, \quad (8)$$

$$\alpha = \frac{\beta p}{1 + \beta p}, \quad \beta = \frac{A l_r}{k_B T_w} \exp\left(\frac{D_e}{k_B T_w}\right) \frac{l}{l_r}.$$

이 조건은 혼합기체에도 적용가능하며, 그 정확성은 이전연구[10]에서 Maxwell 조건과 거의 같은 수준인 것으로 확인되었다. β 는 화학반응 상수와 같은 역할을 하는 데 온도와 상호작용 변수의 함수이다. A 는 평균면적, D_e 는 퍼텐셜 변수, l 는 고체 표면과 기체입자 사이의 평균 충돌간격, l_r 는 기준 평균자유행로를 나타낸다. A, D_e 는 고체면의 재질과 기체입자의 종류에 의해 이론예측이나 실험으로 정해진다. 기준 평균자유행로를 평균 충돌간격으로 가정하면 상수 β 는 아래와 같이 된다.

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi}{32}} \frac{A}{c^2 d_{\text{STP}}^2 p_r} \left[\frac{T_r}{273} \right]^{\frac{2}{\nu-1}} \exp\left(\frac{D_e}{k_B T_w}\right).$$

여기서 d 는 기체입자의 직경을 나타내며, Ar-Al 모델의 상호작용 변수는 다음 값으로 근사될 수 있다.

$$D_e = 1.32 \text{ kcal/mol}, \quad d_{\text{STP}} = 3.659 \times 10^{-8} \text{ cm}.$$

평균면적 A 를 πd^2 으로 가정하면 변수 β 는 아래와 같이 된다.

$$\beta = \frac{0.95}{p_r} \frac{T_r}{T_w} \exp\left(\frac{664.23}{T_w}\right).$$

Langmuir 조건은 이원자 기체에도 쉽게 적용될 수 있는데, 고체표면에 이중막이 생성된다고 가정하면 아래와 같이 표현된다.

$$\alpha = \frac{\sqrt{\beta p}}{1 + \sqrt{\beta p}}.$$

N_2 -Al 모델인 경우 아래의 상호작용 상수를 사용할 수 있다.

$$D_e = 1.32 \text{ kcal/mol}, \quad d_{STP} = 3.784 \times 10^{-8} \text{ cm}.$$

III. 전산유체역학 기법

보존법칙 (1)에 대한 수치기법은 비평형 물리 변수 Π, Δ, Q 값이 주어지면 기존의 NSF 방정식 전산기법을 그대로 사용할 수 있어 아주 효율적이다. 요소 관계식 계산에 관한 알고리즘만 첨가하면 된다.

3.1 요소관계식

요소 관계식 (2)-(4)는 압력, 속도 및 온도 구배에 관한 14개의 변수에 관한 10개의 비선형 대수 방정식 형태이다. 비평형 정도에 상관없이 성립하는 보존법칙 (1)의 비보존 변수를 계산하기 위해서는 요소 관계식을 풀어야 한다. 이 과정에서 가장 중요한 기본 유동은 팽창 및 압축, 전단 흐름이다. 단원자 기체에 관한 이전 연구를 확장하면 다음과 같이 요약된다.

압축 및 팽창 유동

평면문제인 경우로 국한하면 주어진 열역학 힘 $(u_x, 0, T_x)$ 에 대해 (Π_{xx}, Δ, Q_x) 값을 구하는 문제가 된다. 단원자 기체 문제와 유사하게 요소 관계식은 아래의 대수 방정식 형태가 된다.

$$\widehat{\Pi}_{xx} q(c\widehat{R}) = (1 + f_b \widehat{\Delta} + \widehat{\Pi}_{xx}) \widehat{\Pi}_{xx0}, \quad (9)$$

$$\widehat{\Delta} q(c\widehat{R}) = [3(\widehat{\Pi}_{xx} + f_b \widehat{\Delta}) + 1] \widehat{\Delta}_0, \quad (10)$$

$$\widehat{Q}_x q(c\widehat{R}) = (1 + f_b \widehat{\Delta} + \widehat{\Pi}_{xx}) \widehat{Q}_{x0}. \quad (11)$$

여기서

$$\widehat{R}^2 = \frac{3}{2} \widehat{\Pi}_{xx}^2 + \frac{4}{5f_b} \widehat{\Delta}^2 + \widehat{Q}_x^2,$$

$$\widehat{\Delta}_0 = \frac{3}{4} f_b \widehat{\Pi}_{xx0}.$$

전단응력의 xx -성분과 초과 수직응력 사이에는 아래 식과 같은 대응관계가 존재함을 위 식으로부터 알 수 있다.

$$\widehat{\Delta} = \frac{1}{8f_b} [(9f_b^2 - 4) \widehat{\Pi}_{xx} - 4 + \sqrt{D}].$$

여기서

$$D = (81f_b^4 + 72f_b^2 + 16) \widehat{\Pi}_{xx}^2 + (32 - 24f_b^2) \widehat{\Pi}_{xx} + 16.$$

(9)-(11)로 주어진 대수 방정식의 해는 반복기법을 이용하여 간단히 구할 수 있는 데, 요약하면 다음과 같다. 양의 $\widehat{\Pi}_{xx0}, \widehat{Q}_{x0}$ 값에 대해서는 아래 식을 통해 해를 계산한다. (n 는 반복 수)

$$\widehat{R}_{n+1} = \frac{1}{c} \sinh^{-1} [c \sqrt{RH_n}],$$

$$\widehat{\Pi}_{xx\ n+1} = \frac{(1 + \widehat{\Pi}_{xxn} + f_b \widehat{\Delta}_n) \widehat{\Pi}_{xx0}}{\sqrt{RH_n}} \widehat{R}_{n+1},$$

$$\widehat{Q}_{x\ n+1} = \frac{\widehat{Q}_{x0}}{\widehat{\Pi}_{xx0}} \widehat{\Pi}_{xx\ n+1}.$$

여기서

$$RH \equiv (1 + \widehat{\Pi}_{xx} + f_b \widehat{\Delta})^2 \widehat{R}_0^2 + 4(\widehat{\Pi}_{xx} + f_b \widehat{\Delta}) [1 + 2(\widehat{\Pi}_{xx} + f_b \widehat{\Delta})] \frac{4}{5f_b} \widehat{\Delta}_0^2,$$

$$\widehat{\Pi}_{xx1} = \frac{\sinh^{-1}(c\widehat{R}_0)}{c\widehat{R}_0} \widehat{\Pi}_{xx0},$$

$$\widehat{\Delta}_1 = \frac{\sinh^{-1}(c\widehat{R}_0)}{c\widehat{R}_0} \widehat{\Delta}_0,$$

$$\widehat{Q}_{x1} = \frac{\sinh^{-1}(c\widehat{R}_0)}{c\widehat{R}_0} \widehat{Q}_{x0}.$$

음의 $\widehat{\Pi}_{xx0}, \widehat{Q}_{x0}$ 값에 대해서도 다음 식을 사용하여 유사하게 해를 구할 수 있다.

$$\widehat{\Pi}_{xx\ n+1} = \frac{(1 + f_b \widehat{\Delta}_n) \widehat{\Pi}_{xx0}}{q(c\widehat{R}_n) - \widehat{\Pi}_{xx0}}.$$

서로 다른 부호를 갖는 $\widehat{\Pi}_{xx0}, \widehat{Q}_{x0}$ 값에 대해서는 $\widehat{Q}_x \leftrightarrow (-)\widehat{Q}_x$ 변환의 불변성을 이용하여 위의 두가지 경우로부터 그 해를 결정할 수 있다.

전단 유동

속도 구배만 존재하는 전단 흐름에서는 주어진 열역학 힘 $(0, v_x, 0)$ 에 대해 $(\Pi_{xx}, \Pi_{xy}, \Delta)$ 값을 구하는 문제가 된다. 이 경우의 요소관계식은

$$\widehat{\Pi}_{xx} q(c\widehat{R}) = -\frac{2}{3} \widehat{\Pi}_{xy} \widehat{\Pi}_{xy0}, \quad (12)$$

$$\widehat{\Pi}_{xy} q(c\widehat{R}) = (1 + f_b \widehat{\Delta} + \widehat{\Pi}_{xx}) \widehat{\Pi}_{xy0}, \quad (13)$$

$$\widehat{\Delta}q(c \widehat{R}) = 3f_b \widehat{\Pi}_{xy} \widehat{\Pi}_{xy_0}, \quad (14)$$

으로 표현되고, 세 방정식을 간단히 하면

$$\widehat{\Pi}_{xx} q^2(c \widehat{R}) = -\frac{2}{3} \left[\left(1 - \frac{9}{2} f_b^2\right) \widehat{\Pi}_{xx} + 1 \right] \widehat{\Pi}_{xy_0}^2, \quad (15)$$

$$\widehat{\Delta} = -\frac{9}{2} f_b \widehat{\Pi}_{xx}. \quad (16)$$

여기서

$$\widehat{R}^2 = 3 \widehat{\Pi}_{xx} \left[\left(1 + \frac{45}{4} f_b^2\right) \widehat{\Pi}_{xx} - 1 \right].$$

전단 응력 Π_{xy} 는 주어진 Π_{xx} 로 부터 아래의 응력제한 관계식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\widehat{\Pi}_{xy} = \text{sign}(\widehat{\Pi}_{xy_0}) \left[-\frac{3}{2} \left[\left(1 - \frac{9}{2} f_b^2\right) \widehat{\Pi}_{xx} + 1 \right] \widehat{\Pi}_{xx} \right]^{1/2}. \quad (17)$$

(15)식으로 주어진 비선형 대수 방정식의 해는 아래 반복식을 이용하여 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \widehat{R}_{n+1} &= \frac{1}{c} \sinh^{-1}[c \text{RH}_n], \\ \text{RH} &\equiv \left[2 \left[1 + \left(1 - \frac{9}{2} f_b^2\right) \widehat{\Pi}_{xx} \right] \right. \\ &\quad \left. \left[1 - \left(1 + \frac{45}{4} f_b^2\right) \widehat{\Pi}_{xx} \right]^{1/2} \widehat{\Pi}_{xy_0} \right]. \end{aligned}$$

용적 점성계수 효과

(9)-(11)로 표현되는 압축 및 팽창 유동은 유한한 f_b 값으로 인해 그 수학적 특성이 바뀌지 않는 반면, (17)식으로 표현되는 전단 유동의 응력제한 관계식은 아래의 f_b 임계값을 지나면 그 수학적 구조가 타원형에서 쌍곡선형으로 변한다.

$$f_b = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

질소를 포함한 대부분의 이원자 기체는 임계값보다 큰 값을 가지므로 전단유동에서 회전 비평형 효과가 정성적인 차이를 유발할 만큼 크다고 할 수 있다. 하지만 요소관계식을 반복기법을 계산하는 알고리즘은 거의 차이가 없어, 전체 계산시간은 NSF 코드에 비해 약간의 추가계산을 필요로 하는 단원자 기체인 경우[7]와 같은 수준이다.

압축 및 팽창 유동에서의 회전 비평형에 의한 용적 점성계수 효과를 Fig. 1과 Fig. 2에서 살펴볼 수 있다. Fig. 1는 주어진 $\widehat{\Pi}_{xy_0}$ (수평축) 대한

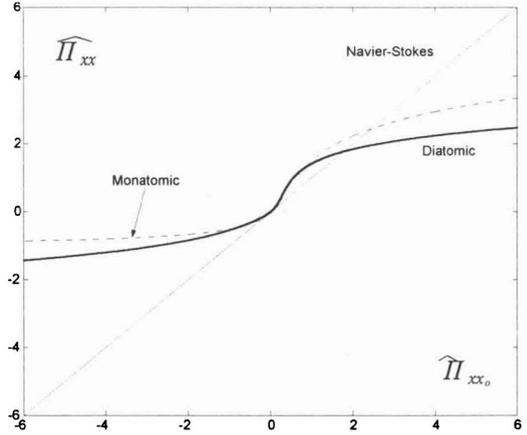


Fig. 1. Generalized hydrodynamic constitutive relations relative to the NSF theory (no heat flux).

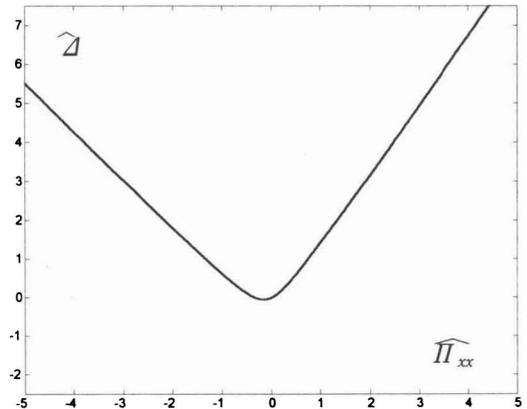


Fig. 2. The relationship between the shear stress and the excess normal stress.

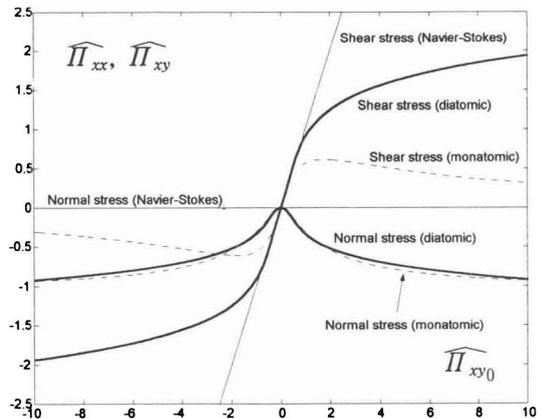


Fig. 3. Generalized hydrodynamic stress relations under shear velocity gradient.

NSF 이론, 단원자 및 이원자 일반유체역학 관계식으로 계산된 $\widehat{\Pi}_{xx}$ 을 나타낸다. 양의 값을 갖는 영역은 압축 과정, 음의 값을 갖는 영역은 팽창 과정을 나타낸다. 용적 점성계수로 인해 수직 응력값이 상당히 달라짐을 알 수 있다. 이 성질로 인해 이원자 기체 충격파 구조가 단원자 인 경우와 달라지게 된다. Fig. 2는 이원자 기체의 수직 응력 $\widehat{\Pi}_{xx}$ (수평축)와 초과 응력 $\widehat{\Delta}$ 의 관계를 보여 주며, Fig. 1의 이원자 기체 수직 응력 값으로부터 초과 응력을 계산할 수 있다. 압축 과정에서는 거의 선형 관계이나 팽창 과정에서는 비선형이 됨을 쉽게 확인할 수 있다.

Fig. 3은 경계층에서 발생하는 전단속도 구배 $\widehat{\Pi}_{xy0}$ 에 대한 요소 관계식을 보여준다. 수직 응력에 대한 회전 비평형 효과는 미미하지만 전단 응력에 대해서는 그렇지 않음을 알 수 있다. 기체의 종류에 상관없이 선형 관계식보다는 작은 전단 응력 값을 가지나, 그 값이 이원자 기체에서 크게 나타남을 알 수 있다.

3.2 유한체적법

보존법칙 (1)은 사용된 좌표계나 차원에 관계없이 성립한다[7]. 직교 좌표계는 간단하지만 곡면 주위의 유동과 같은 복잡한 문제에는 적용하기 어렵다. 하지만 유한체적법을 이용하면 비직교 영역을 어려움 없이 다룰 수 있다. 이것은 보존법칙의 회전불변성에 기인한 것으로 임의 단면의 수치플럭스를 직교면에서의 값으로 변환할 수 있기 때문이다.

(x, y) 공간에서 유한체적 $A_{i,j}$ 의 l -번째 격자면을 ΔL_l 라하고 $(n, s)_l$ 를 격자면에 수직, 평행한 벡터라 하면, 격자면과 직교면의 관계는 회전각 θ 에 의해 결정된다. 유한체적의 중심이 항상 격자면 왼쪽에 위치하도록 하면, 유한체적 $A_{i,j}$ 에 관한 보존변수 U 의 쌍곡형 법칙 (1)은 시간증분 Δt 에 대해 아래와 같이 표현된다.

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{A_{i,j}} \sum_{l=1}^N R_l^{-1} F_{T_l}^n \Delta L_l \quad (18)$$

여기서

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad F_{T_l} = \begin{pmatrix} \rho u_n \\ \rho u_n^2 + \frac{p}{\gamma M^2} \\ \rho u_n u_s \\ (\rho E + \frac{p}{\gamma M^2}) u_n \end{pmatrix}_l +$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \begin{pmatrix} 0 \\ \Pi_{nn} + f_b \Delta \\ \Pi_{ns} \\ (\Pi_{nn} + f_b \Delta) u_n + \Pi_{ns} u_s + \frac{1}{\text{EcPr}} Q_n \end{pmatrix}_l$$

회전 매트릭스 R 과 (x, y) 좌표공간의 응력텐서는 다음과 같다[9].

$$\Pi = R^{-1} \Pi^* R. \quad (19)$$

여기서 Π^* 는 (n, s) 좌표상의 응력텐서를 나타내며 R 는 아래와 같이 정의된다.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

식 (18)이 필요로 하는 비보존 변수 (Π, Δ, Q_x) 값은 이차원 문제인 경우, 주어진 열역학적 힘 (u_x, v_x, T_x) 와 변수 (p, T) 에 대해 3.1절에서 설명된 $(u_x, 0, T_x)$ 와 $(0, v_x, 0)$ 두 개의 경우로 근사하여 결정할 수 있다.

3.3 기타 수치기법

식 (18)이 완전한 형태가 되려면 격자 사이의 수치플럭스와 시간증분 Δt 를 정해야 한다. 본 연구에서는 van Leer의 FVS와 아래 식으로 표현되는 시간증분 값을 사용하였다.

$$\Delta t = \text{CFL} \cdot \min(\Delta t_1, \Delta t_2), \quad (20)$$

$$\Delta t_1 = M \left[\frac{\Delta x}{|a|} + \frac{2\eta(1+0.8f_b)M}{\rho a^2} \right],$$

$$\Delta t_2 = M \left[\frac{|a|}{\Delta x} + \frac{\eta(1+0.8f_b)M}{\rho \Delta x^2} \right]^{-1}$$

2차 정확도 향상에는 MUSCL-Hancock 기법을 사용하였다. 고체면에는 (7), (8)의 경계조건과 수직 방향의 압력변화가 영이라는 기계적 평형조건을 적용하였다. 자유면과 같은 기타 수치 경계면은 Euler 방정식과 동일하게 취급하였다.

IV. 수치 계산

2, 3절의 일반유체역학의 정확도와 효율성을 알아보기 위해 대표적인 두 문제를 고려하였다. 요소 관계식에서 급속 팽창과 압축(충격파), 전단 유동 경우에 비선형 성질이 부각되는 것을 알 수

있어, 일차원 충격파 구조 문제와 무딘 물체 주위 극초음속 희박유동을 선택하였다.

기체는 공기의 대부분을 차지하는 질소로 하였고, 고체표면은 알루미늄으로 가정하였다. 질소 기체의 점성계수는 분자간 힘을 나타내는 지수 $s=0.78$ 로 표현되고 $c=1.0179$, $f_b=0.8$ 이다. 유동 문제를 잘 정의하기 위해 필요한 초기값들로는 무차원 기본 유동 변수 (마하수, Reynolds 수 또는 Knudsen 수), 열역학 변수 (벽면온도, 기준온도), 기체 물성치 (입자 직경, s), 기체-표면 상호작용 변수 (A , D_e) 등이다.

4.1 충격파 내부구조

기체 입자가 비가역 과정을 통해 급속히 압축되어 밀도 등의 변수들이 급격히 변하는 면을 충격파로 일컫는데, 그 두께가 평균자유행로의 크기에 필적할 정도로 작아 큰 Knudsen 수를 갖는다. 이 영역에서는 엔트로피가 증가하기 때문에 그 내부구조는 높은 비평형도를 갖는 유동으로 특징 지워진다. 이런 이유로 충격파 문제는 비평형 해석모델의 검증에 적합하며, 특히 고체면 경계조건을 고려할 필요가 없어 실험이나 다른 결과와 비교할 때 신뢰성이 높다.

Fig. 4에 충격파 내부의 밀도 분포에 관련된 역(inverse) 두께 변화를 마하수에 대해 나타내었다. 격자수는 500개이며 CFL 수는 0.5이다. 검증을 위해 Alsmyer 등의 실험값[14-16]도 표시하였다. 일반유체역학(GH) 이론값이 실험값과 가장 근사함을 확인할 수 있다. 반면, Stokes 가정을 필요로 하는 잘 알려진 준평형 NSF 방정식은

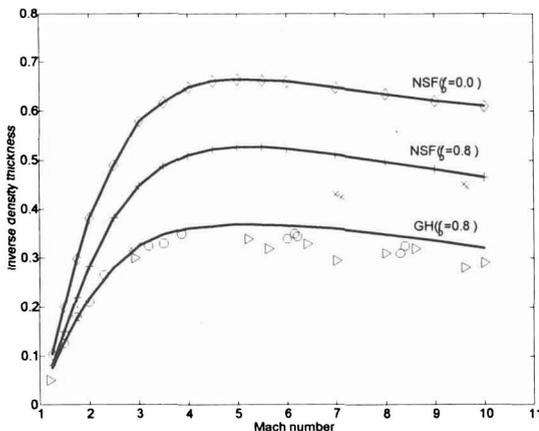


Fig. 4. Inverse shock density thickness. The symbols are: (\triangleright) by Camac [14]; (\times) by Robben and Talbot [15]; and (\circ) by Alsmyer [16].

실험값과 상당한 차이가 나는 예측값을 보여 준다. 용적 점성계수 개념을 도입하면 그 경향이 약간 개선되나, 여전히 일반유체역학에 비해서는 그 정확도가 떨어진다.

4.2 2차원 극초음속 유동장

Figs. 5-8은 무딘 물체 주위의 극초음속 희박 유동장의 특성을 보여 준다. 마하수 10, Knudsen 수 0.1, 벽면온도 1000.3 K, 자유류 온도 208.4 K의 초기값을 사용하였다. 계산격자는 40×60 이며, 미끄럼 경계조건으로 Langmuir 조건을 이용하였다. 계산영역에서 나가는 유동 흐름에 대해서는 외삽 기법을 적용하였으며 경계조건을 포함한 모든 조건을 각 이론에 동일하게 적용하였다.

Fig. 5에 일반유체역학, NSF, Stokes 가정 NSF 이론에 의한 무딘 물체 주위의 정체 유선의 온도 변화를 비교하였다. 무시할 수 없는 비평형도인해 일반유체역학과 NSF 이론 사이에 상당한 차이가 남을 알 수 있다. 또한 같은 NSF이론에서도 용적 점성계수의 유무에 의해 약간의 차이가 생기는 것을 발견할 수 있다. Figs. 6-8는 유동의 온도 등고선도를 보여 주는데, 일반유체역학 이론이 충격파 내부의 전반부에서 보다 급격한 온도 상승을 보여준다. 이 성질은 충격파 내부 구조 해석결과에서 일관되게 나타나는 데, 일반유체역학 이론이 보다 실험값에 근사한 해를 제공하는 점에 비추어 볼 때 높은 비평형 효과중에 하나인 것으로 생각된다. Figs. 5-8에서 L 는 특성길이인 실린더의 반경을 나타낸다.

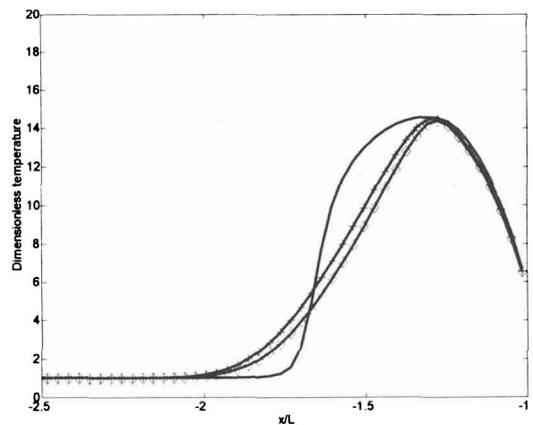


Fig. 5. Temperature distribution along stagnation streamline. The symbols are: (\diamond) by NSF ($f_b=0$); ($+$) NSF ($f_b=0.8$); and solid line by GH ($f_b=0.8$).

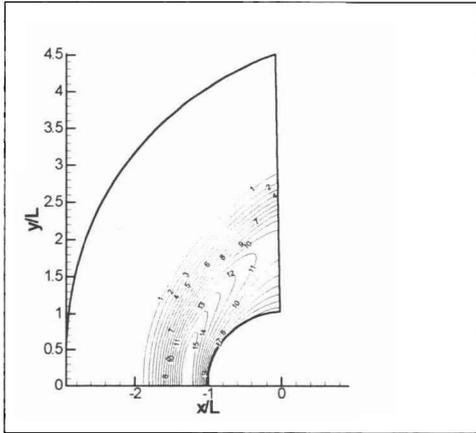


Fig. 6. Temperature contours by NSF theory.

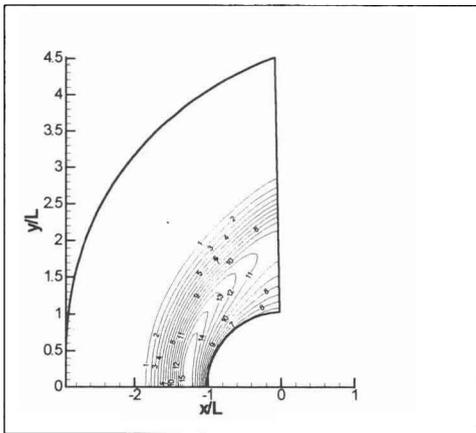


Fig. 7. Temperature contours by NSF theory with Stokes' hypothesis.

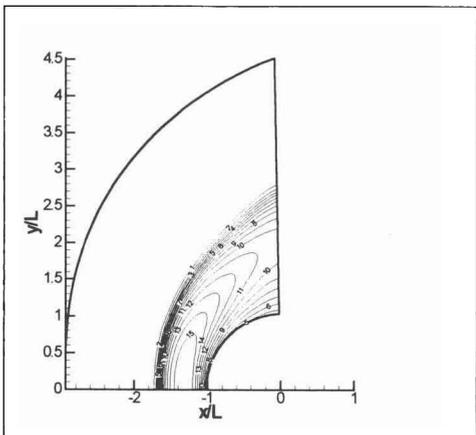


Fig. 8. Temperature contours by the generalized hydrodynamic theory.

V. 결론 및 토의

Eu의 일반유체역학 이론을 바탕으로 이원자 기체에 관한 비평형 계산모델을 개발하였다. (1)-(8)로 표현된 식들은 높은 비평형 영역에 적용가능한 새로운 유체 지배방정식 및 경계조건을 나타낸다. 유도된 유체역학 방정식을 해석하여 회전 비평형 효과를 알아보았고, 단원자 기체에 관한 연구를 확장하여 다차원 CFD 기법을 개발하였다. 개발된 수치기법을 이용하여 충격과 내부구조 및 극초음속 희박 유동을 해석하였다.

특히 충격과 구조 연구를 통해 일반유체역학의 가능성을 확인하였다. 전산코드 구조는 NSF 코드와 유사하여 Burnett형 방정식과 같은 다른 고차 유체방정식에 비하면 아주 효율적이다. 하지만 저속인 미소유동을 해석하기 위한 수치해 수렴성 향상이나, 보다 다양한 문제를 통한 일반유체역학의 정확도를 검증하는 것은 향후 연구를 통해 이루어야 할 것이다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 특정기초연구(과제번호 1999-2-305-001-3) 사업의 지원을 받아 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. Ho, C. M. and Tai, Y. C., "Micro-Electro-Mechanical-Systems (MEMS) and Fluid Flows," *Annual Review in Fluid Mechanics*, Vol. 30, pp.11-22, 1999.
2. Bird, G. A., *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*, Clarendon Press, Oxford, England, 1994.
3. 박재현, 강신재, 김정수, 백승욱, 유명중, "인공위성 추력기 플룸의 DSMC 해석," 한국항공우주학회지, 29권 8호, pp. 111-118, 2001.
4. White, F. M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw Hill, 1974.
5. Eu, B. C., *Kinetic Theory and Irreversible Thermodynamics*, John Wiley & Sons, New York, 1992.
6. Eu, B. C. and Ohr, Y. G., "Generalized Hydrodynamics, Bulk Viscosity, and Sound Wave Absorption and Dispersion in Dilute Rigid Molecular Gases," *Physics of Fluids*, Vol.

13, No. 3, pp. 744-753, 2001.

7. 명노신, "열역학 층속 비평형 유체역학 모델을 이용한 희박기체 및 MEMS 유동장 해석," 한국항공우주학회지, 28권 4호, pp. 35-47, 2000.

8. Chae, D., Kim, C., Rho, O. H., and Myong, R. S., "Analysis of Rarefied Nozzle Flow by Generalized Hydrodynamic Equations," AIAA Paper 2001-0894.

9. Myong, R. S., "A Computational Method for Eu's Generalized Hydrodynamic Equations of Rarefied and Microscale Gasdynamics," *Journal of Computational Physics*, Vol. 168, pp. 47-72, 2001.

10. Myong, R. S., "Velocity-Slip Effect in Low-Speed Microscale Gas Flows," AIAA Paper 2001-3076.

11. Langmuir, I., Surface Chemistry, *Chemical Reviews*, Vol. 13, p. 147, 1933.

12. Bhattacharya, D. K and Eu, B. C, "Nonlinear Transport Processes and Fluid Dynamics: Effects of Thermoviscous Coupling and Nonlinear Transport Coefficients on Plane

Couette Flow of Lennard-Jones Fluids," *Physical Riview A*, Vol. 35, No. 2, p. 821, 1987.

13. Lumpkin III, F. E., Chapman, D. R., and Park, C., "A New Rotational Relaxation Model for Use in Hypersonic Computational Fluid Dynamics," AIAA Paper 1989-1737.

14. Camac, M., "Argon Shock Structure," *Proceedings of the Fourth International Symposium on Rarefied Gas Dynamics*, Edited by J. H. De Leeuw, Academic Press, New York, 1965.

15. Robben, F. and Talbot, L., "Measurements of Shock Wave Thickness by the Electron Beam Fluorescence Method," *Physics of Fluids*, Vol. 9, pp. 633-643, 1966.

16. Alsmyer, H., "Density Profiles in Argon and Nitrogen Shock Waves Measured by the Absorption of an Electron Beam," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 74, pp. 497-513, 1976.

17. Chapman, S. and Cowling, T. G., *The Mathematical Theory of Nonuniform Gases*, 3rd ed., Cambridge University Press, 1990.